Contrôle optimal pour l'équation de diffusion à l'aide de la PGD

Giens 2015

P. Joyot[a,⋆], N. Bur[a], P. Villon[b], F. Chinesta[c], J. Canou[a]

[a] ESTIA-Recherche, Technopôle Izarbel, 64210 Bidart, France
[b] UTC, Département GSM, Centre de Recherches de Royallieu, CS 60319, 60203 Compiègne cedex, France
[c] GeM Institute, École Centrale de Nantes, 1 rue de la Noë, 44321 Nantes cedex 3, France
[⋆] p.joyot@estia.fr

Problématique

Nous considérons le problème de contrôle optimal gouverné par une équation de diffusion sur le domaine Ω :

$$\min_u J\left(u\left(x,z\right)\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(y\left(x,z\right)-y_d\left(x,z\right)\right)^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega u\left(x,z\right)^2 dx$$

contraint par

$$\begin{cases} -\Delta y\left(x,z\right) = u\left(x,z\right) + f\left(x,z\right) & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où y est la variable d'état, y_d la consigne, u la commande et $\alpha > 0$.
Conditions d'optimalités

$$-\Delta y\left(x,z\right) - \frac{1}{\alpha}p\left(x,z\right) = f\left(x,z\right)$$
$$-\Delta p\left(x,z\right) + y\left(x,z\right) = y_d\left(x,z\right)$$
$$p\left(x,z\right) = \alpha u\left(x,z\right)$$
$$\text{avec } y = 0 \text{ et } p = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Forme faible des conditions d'optimalités

$$\int_\Omega \nabla p^\star\cdot\nabla p\,dx + \int_\Omega p^\star y\,dx = \int_\Omega p^\star y_d\,dx \quad \forall p^\star$$
$$\int_\Omega \nabla y^\star\cdot\nabla y\,dx - \frac{1}{\alpha}\int_\Omega y^\star p\,dx = \int_\Omega y^\star f\,dx \quad \forall y^\star$$

Formulation PGD

L'espace peut se séparer suivant les coordonnées x, z, i.e. $\Omega = \Omega_x \times \Omega_z$. Le vecteur inconnu Ψ qui regroupe à la fois les valeurs nodales de p et de y, prend la forme

$$\Psi = \left[\begin{array}{c} Y \\ P \end{array}\right] = \sum_\alpha^\infty \left[\begin{array}{c} Y_x^\alpha \otimes Y_z^\alpha \\ P_x^\alpha \otimes P_z^\alpha \end{array}\right]$$

Ainsi la formulation PGD du système est donnée par la définition suivante de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^6 A_x^j \otimes A_z^j$$

$$A_x^1 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & K_x^p \end{array}\right] \quad A_x^2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & M_x^p \end{array}\right]$$
$$A_z^1 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & M_z^p \end{array}\right] \quad A_z^2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & K_z^p \end{array}\right]$$
$$A_x^3 = \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{\alpha}M_x^{yp} \\ 0 & 0 \end{array}\right] \quad A_x^4 = \left[\begin{array}{cc} K_x^y & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$A_z^3 = \left[\begin{array}{cc} 0 & M_z^{yp} \\ 0 & 0 \end{array}\right] \quad A_z^4 = \left[\begin{array}{cc} M_z^y & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$A_x^5 = \left[\begin{array}{cc} M_x^y & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \quad A_x^6 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ M_x^{py} & 0 \end{array}\right]$$
$$A_z^5 = \left[\begin{array}{cc} K_z^y & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \quad A_z^6 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ M_z^{py} & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{B} = \sum_{j=1}^2 B_x^j \otimes B_z^j \quad \left| \begin{array}{l} B_x^1 = \left[\begin{array}{c} M_x^y F \\ 0 \end{array}\right] B_x^2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ M_x^p Y_d \end{array}\right] \\ B_z^1 = \left[\begin{array}{c} M_z^y F \\ 0 \end{array}\right] B_z^2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ M_z^p Y_d \end{array}\right] \end{array}\right.$$

Formulation PGD paramérique

Nous considérons maintenant que la consigne s'écrit βy_d ou β est un paramètre. Nous allons construire la solution du problème pour une plage de valeurs de β définie par le domaine Ω_β. Le vecteur solution s'écrit maintenant :

$$\Psi = \sum_\alpha^M \left[\begin{array}{c} Y_x^\alpha \otimes Y_z^\alpha \otimes Y_\beta^\alpha \\ P_x^\alpha \otimes P_z^\alpha \otimes P_\beta^\alpha \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} Y_x \otimes Y_z \otimes Y_\beta \\ P_x \otimes P_z \otimes P_\beta \end{array}\right]$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont maintenant définis par

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^6 A_x^j \otimes A_z^j \otimes A_\beta^j$$

avec

$$A_\beta^1 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & M_\beta^p \end{array}\right] \quad A_\beta^2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & M_\beta^p \end{array}\right] \quad A_\beta^3 = \left[\begin{array}{cc} 0 & M_\beta^{py} \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$A_\beta^4 = \left[\begin{array}{cc} M_\beta^y & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \quad A_\beta^5 = \left[\begin{array}{cc} M_\beta^y & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \quad A_\beta^6 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ M_\beta^{py} & 0 \end{array}\right]$$

et

$$\mathcal{B} = \sum_{j=1}^2 B_x^j \otimes B_z^j \otimes B_\beta^j$$

avec

$$B_\beta^1 = \left[\begin{array}{c} M_\beta^y F \\ 0 \end{array}\right] B_\beta^2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \overline{M}_\beta^p Y_\beta \end{array}\right]$$

où

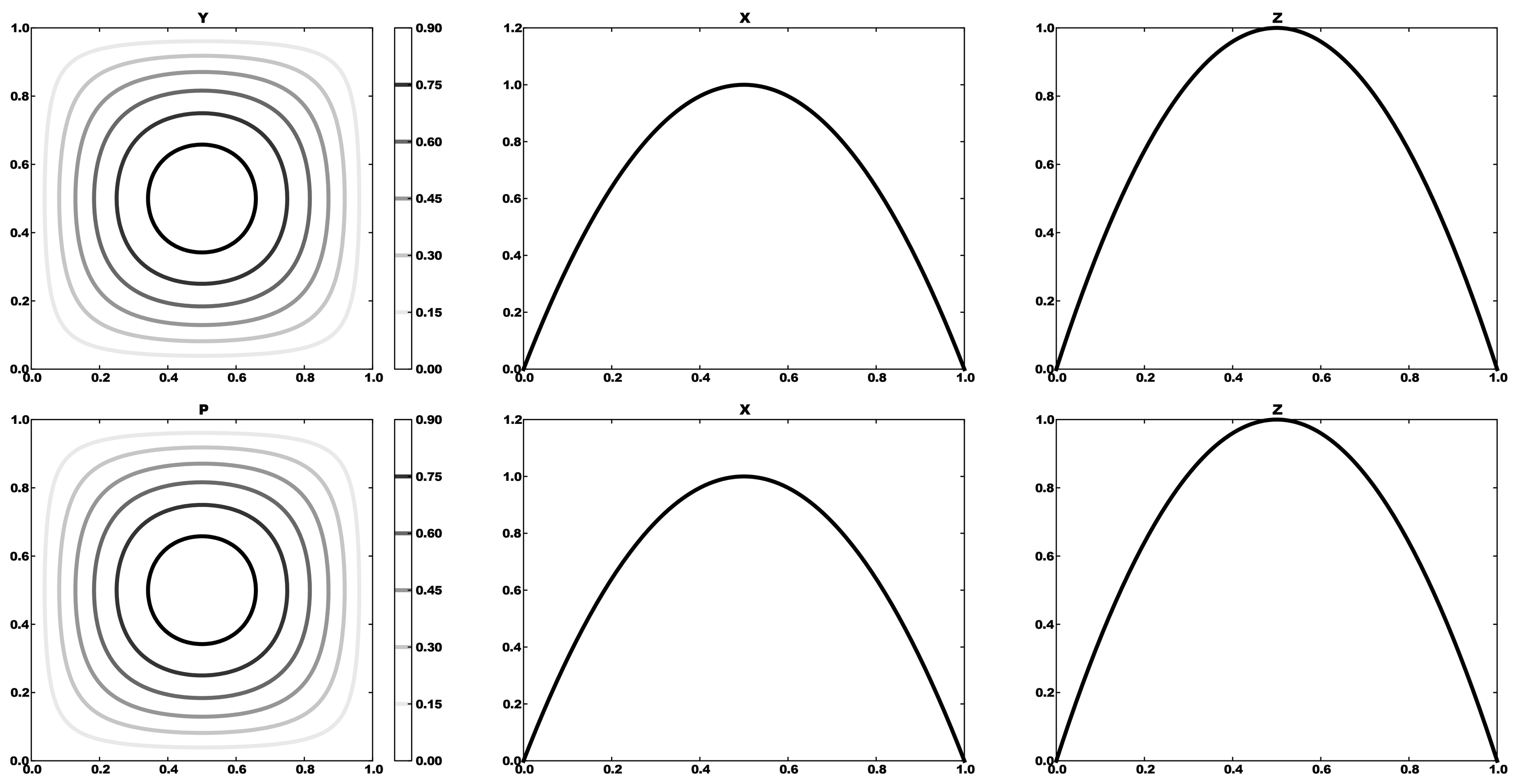
$$\overline{M}_\beta^y = \int_{\Omega_\beta} x_\beta N_\beta^y {N_\beta^y}^T\, dx_\beta$$

Résultats numériques

Nous validons notre démarche sur l'exemple suivant :

$$f\left(x,z\right) = -\frac{1}{\alpha}16x(1-x)z(1-z) + 32x\left(1-x\right) + 32z\left(1-z\right)$$
$$y_d\left(x,z\right) = 16x\left(1-x\right)z\left(1-z\right) + 32x\left(1-x\right) + 32z\left(1-z\right)$$

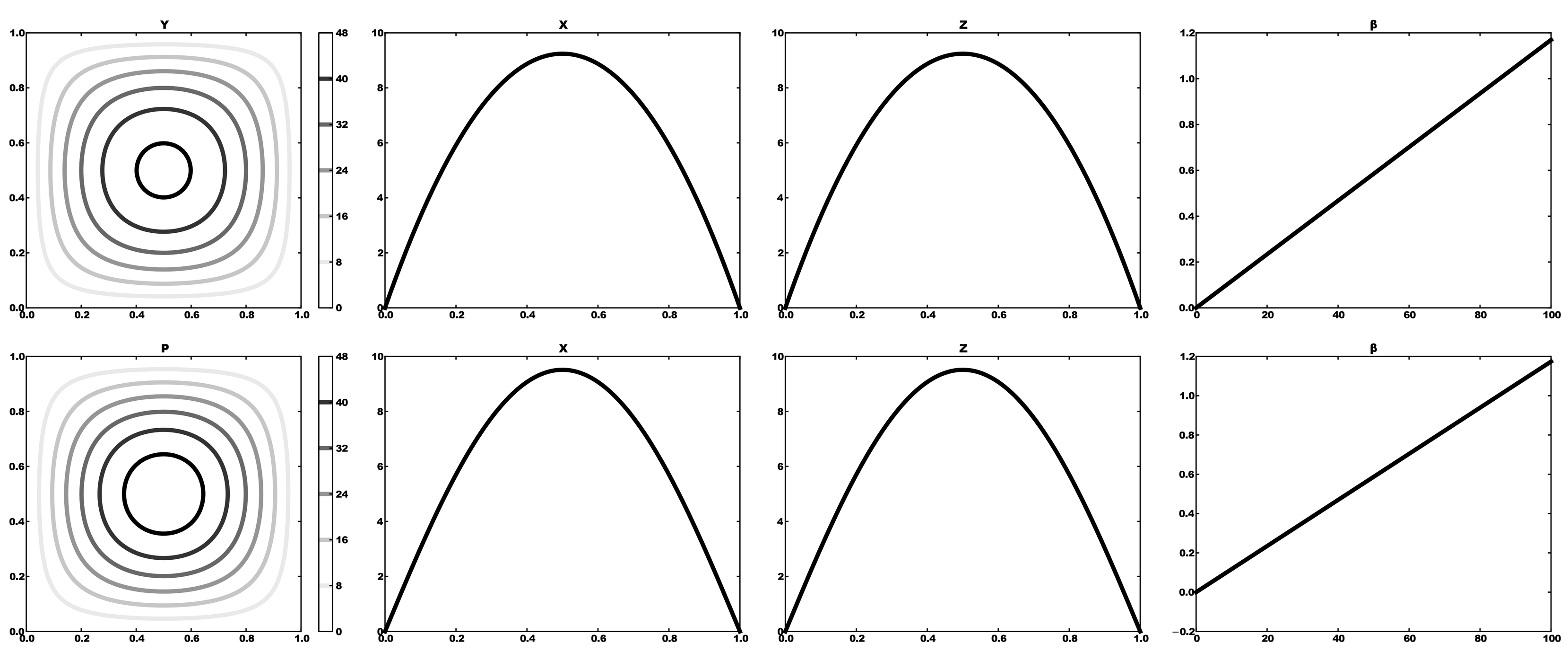
dans ces conditions la solution de notre problème est $y\left(x,z\right) = p\left(x,z\right) = 16x\left(1-x\right)z\left(1-z\right)$. Le résultat est indépendant de α.



Dans le cas paramétrique, nous prenons

$$y_d\left(x,z\right) = \beta\left(16x\left(1-x\right)z\left(1-z\right) + 32x\left(1-x\right) + 32z\left(1-z\right)\right)$$

avec $\alpha = 0.05$



Dans tous les cas la solution exacte est obtenue par le calcul d'un seul couple.